Gli spazi H_0^1

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Allora, lo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ è la chiusura delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $H^1(\mathbb{R}^d)$. In particolare,

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^d).$$

e per ogni funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha che

$$u = 0 \quad \text{quasi-ovunque in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Infine, siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^d)$, abbiamo che

$$H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d).$$

Osservazione 1. *Allo stesso tempo, gli spazi $H_0^1(\Omega)$ sono anche sottospazi di $H^1(\Omega)$. Infatti, lo spazio delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ è un sottospazio non solo di $H^1(\mathbb{R}^d)$, ma anche di $H^1(\Omega)$. Inoltre, se una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ è di Cauchy in $H^1(\mathbb{R}^d)$ lo è anche in $H^1(\Omega)$.*

Negli spazi H_0^1 abbiamo il seguente teorema di compattezza.

Teorema 2 (Teorema di Rellich in domini limitati)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Se u_n è una sottosuccessione limitata di $H_0^1(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ ed una sottosuccessione di u_n (che indichiamo ancora con (u_n)) tali che:*

- *u_n converge a u debole H^1;*
- *u_n converge a u forte L^2;*
- *$u_n(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

Proof. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, consideriamo la successione

$$u_n * \phi_\varepsilon$$

Se $\Omega \subset B_R$ e $\varepsilon < R$, allora $u_n * \phi_\varepsilon$ è una funzione C^∞ con supporto contenuto in B_{2R}. Inoltre,

$$\|u_n * \phi_\varepsilon\|_{L^2} \le \|u_n\|_{L^2},$$
$$\|\nabla(u_n * \phi_\varepsilon)\|_{L^2} = \|(\nabla u_n) * \phi_\varepsilon\|_{L^2} \le \|\nabla u_n\|_{L^2},$$

e quindi $u_n * \phi_\varepsilon$ è limitata in $H^1(\mathbb{R}^d)$. D'altra parte,

$$\|\nabla(u_n * \phi_\varepsilon)\|_{L^\infty} = \|u_n * (\nabla\phi_\varepsilon)\|_{L^\infty} \le \|u_n\|_{L^2}\|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^2}.$$

In particolare, la successione $u_n * \phi_\varepsilon$ è equicontinua ed equilimitata in B_{2R}. Possiamo quindi estrarre una sottosuccessione di Cauchy in L^∞ (e quindi anche in $L^2(B_{2R})$) tale che

$$\|u_n * \phi_\varepsilon - u_m * \phi_\varepsilon\| \le \varepsilon$$

per ogni m, n. Ora, usando la stima

$$\|u_n * \phi_\varepsilon - u_n\|_{L^2} \le \varepsilon\|\nabla u_n\|_{L^2},$$

la disuguaglianza triangolare ed il fatto che $\|\nabla u_n\|_{L^2} \le C$ per una costante universale C, otteniamo che

$$\|u_n - u_m\| \le (1 + 2C)\varepsilon.$$

Ora, estraendo una successione diagonale, otteniamo una sottosuccessione di Cauchy in $L^2(B_{2R})$ e limitata in $H^1(B_{2R})$. Da questa possiamo estrarre una successione che converge debole in H^1 ed un'altra sottosuccessione che converge puntualmente quasi-ovunque. Infine, osserviamo che il limite u sta in $H^1(\Omega)$ perché $H^1(\Omega)$ è chiuso rispetto alla convergenza debole. $\square$

Teorema 3 (Teorema di Poincaré)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_\Omega u^2\,dx \le 4\,\mathrm{diam}(\Omega)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. Usare la disuguaglianza

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)} \le |y|\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad \square$$

Corollario 4. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$. Se $\nabla u \equiv 0$ in Ω, allora $u \equiv 0$ in Ω.*